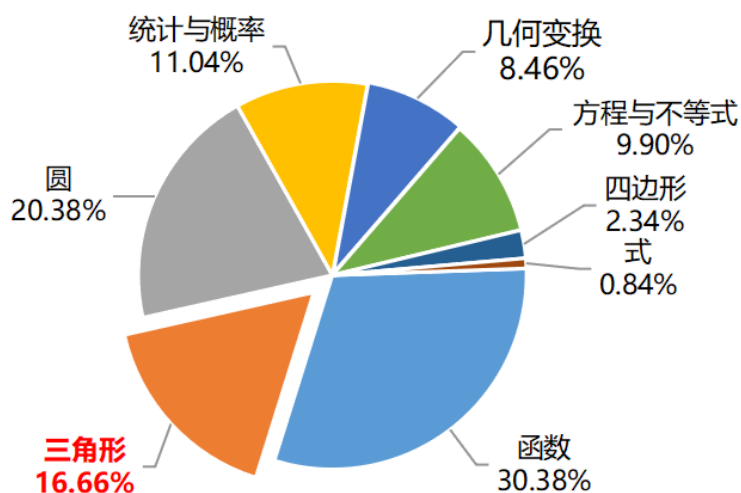


第1讲 相似三角形的性质与判定

相似三角形属于人教版教材第二十七章的内容，是期末考试的重要考察点。本模块《相似三角形》，重点包括相似三角形的判定与性质，同时也需要学生在理解判定与性质的基础上，总结相关模型的解题思路，为后续综合学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为相似三角形的性质与判定、相似三角形的基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
相似图形	★	低
平行线分线段成比例	★	低
相似三角形的判定	★★★★	高
相似三角形的性质	★★★★	高
位似图形	★★★★	中
A字模型	★★★★★	高
8字模型	★★★★★	高
子母模型与射影定理	★★★★★	高
一线三等角模型	★★★★★	高

一、相似图形

思考：观察下列几组物体的照片，你发现了什么？



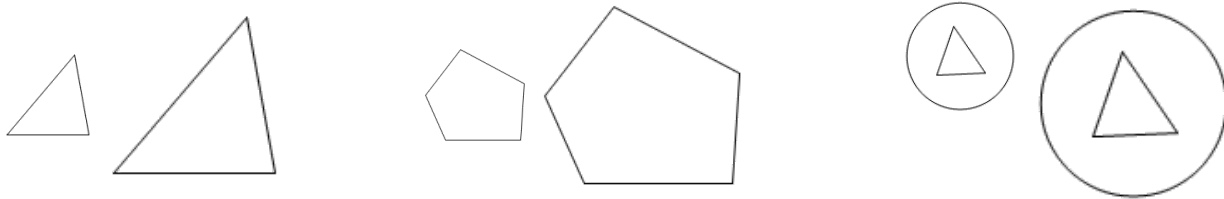
1. 相似图形的定义

引入中的这些例子，都给我们以形状相同的形象。我们把_____的图形叫做**相似图形**。

！注意：①相似图形的大小_____相同。

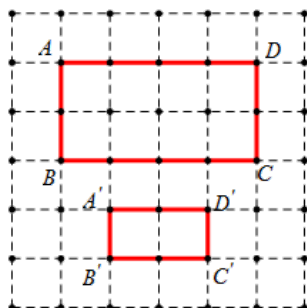
②形状和大小都相同的图形称为_____图形，全等图形是_____的相似图形。

两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形_____或_____得到。如下图，每对图形中的两个图形相似，其中较大的图形可以看成是由较小的图形_____得到的，或者其中较小的图形可以看成是由较大的图形_____得到。

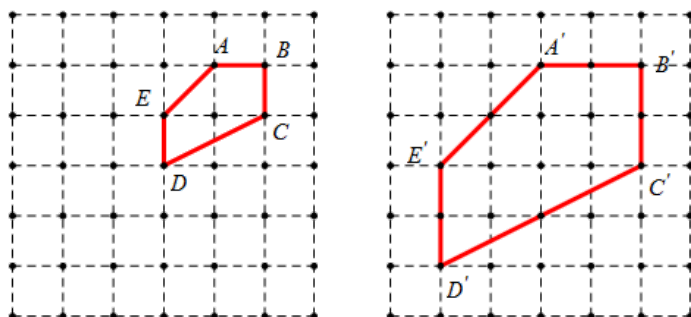


2. 相似多边形

思考：我们学过全等，知道如果两个图形全等，那么这个两个全等图形的对应的边、对应的角，甚至周长、面积都是_____的．那么如果两个图形是相似的，他们的对应边和对应角有什么关系呢？



再看看图中两个相似的五边形，是否和上图观察的得到的结果一样？



！ 总结：两个边数_____的多边形，如果它们的角分别_____，边_____，那么这两个多边形叫做**相似多边形**．相似多边形**对应边的比**叫做_____．

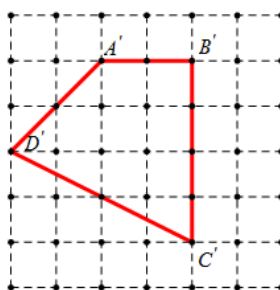
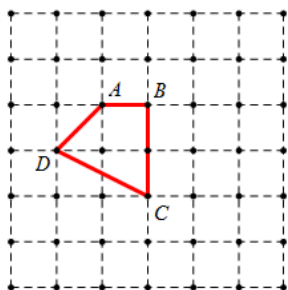
相似多边形的性质：相似多边形的**对应角**_____，**对应边**_____．

相似多边形的判定：如果两个多边形对应边_____、对应角_____，那么这两个多边形相似．

例如，下图中两个大小不同的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，

$$\angle A = \underline{\hspace{1cm}}, \angle B = \underline{\hspace{1cm}}, \angle C = \underline{\hspace{1cm}}, \angle D = \underline{\hspace{1cm}}, \frac{AB}{A'B'} = \underline{\hspace{2cm}}$$

因此，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 相似．



举个“栗”子

栗子1

1. 下列各组图形相似的是（ ）.

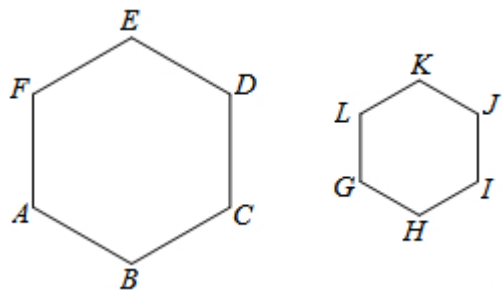


栗子2

2. 下列命题中正确的是（ ）.

- A. 若两个多边形相似，则对应边的比相等
- B. 若两个多边形相似，则对应角的比等于对应边的比
- C. 若两个多边形的对应角相等，则这两个多边形相似
- D. 若两个多边形的对应边的比相等，则这两个多边形相似

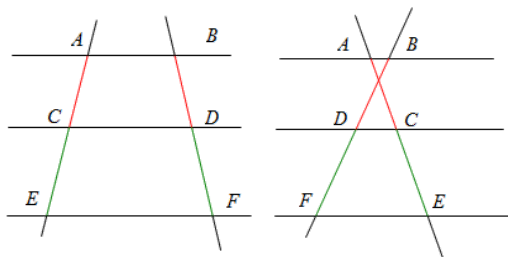
3. 如图，六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ，则下列结论正确的是（ ）.



- A. $\angle B = 2\angle K$
 - B. 六边形 $ABCDEF$ 的周长=六边形 $GHIJKL$ 的周长
 - C. $BC = 2HI$
 - D. $S_{\text{六边形}ABCDEF} = 2S_{\text{六边形}GHIJKL}$
4. 下列说法正确的是（ ）.
- A. 任意两个正方形一定是相似的
 - B. 任意两个矩形一定是相似的
 - C. 任意两个菱形一定是相似的
 - D. 任意两个等腰梯形一定是相似的

二、平行线分线段成比例

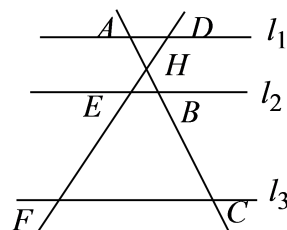
平行线分线段成比例基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。



如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，则 $\frac{AC}{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{AC}{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{CE}{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$

栗子3

5. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 AC 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C ，直线 DF 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F ， AC 与 DF 相交于点 H ，且 $AH = 2, HB = 1, BC = 5$ ，则 $\frac{DE}{EF}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



三、相似三角形的判定

1. 相似三角形定义

相似三角形的定义：形状 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的两个三角形叫做相似三角形（即三个角分别 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，三条边 $\underline{\hspace{2cm}}$ ），相似三角形对应边的比叫做 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。相似用符号 “ $\sim$ ” 表示，读作 “ $\underline{\hspace{2cm}}$ ”。

！注意：①与表示两个三角形全等类似，表示两个三角形相似时，经常把表示对应角顶点的字母写在对应位置上。

②当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，两个三角形 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，所以全等是特殊的相似，但相似 $\underline{\hspace{2cm}}$ 全等。

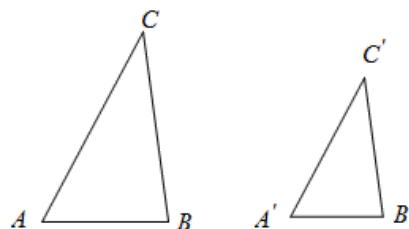
如右图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A = \angle A'$ ，

$\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

那么就说明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，即

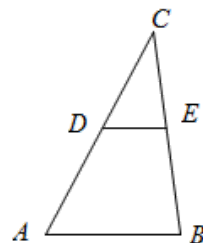
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 k



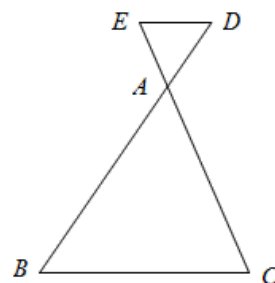
2. 相似三角形的判定

平行出相似

思考一：如下图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel AB$ ，且 DE 分别交 AC ， BC 于点 D 、 E ，那么 $\triangle CDE$ 与 $\triangle CAB$ 有什么关系？试着证明一下。



思考二：如下图， $DE \parallel BC$ ， $\triangle ADE$ 和 $\triangle ACB$ 相似吗？试着证明一下。

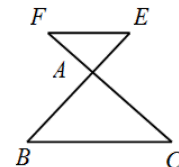
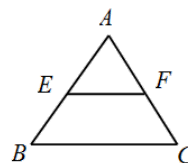


！通过思考部分的证明，得到了证明两个三角形相似的第一个判定定理(**预备定理**)：

_____于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。

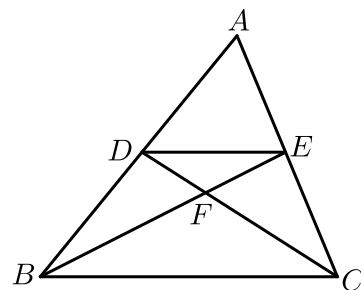
例如：

已知 $BC \parallel EF$ ，则 _____ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ _____。



栗子4

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点， $DE \parallel BC$ ， BE 与 CD 相交于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）。



A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

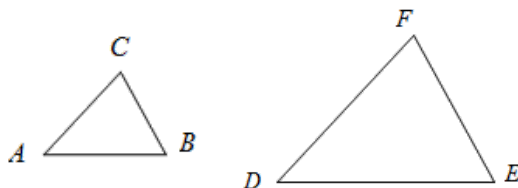
B. $\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EC}$

C. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$

D. $\frac{DF}{BF} = \frac{EF}{FC}$

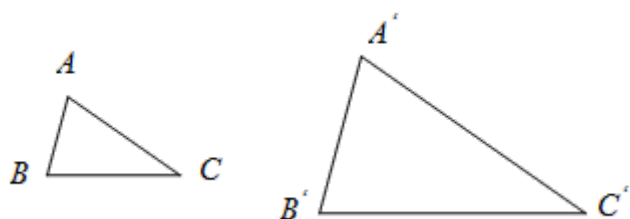
三边对应成比例

思考：△ABC 和 △DEF 中， $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ，求证 △ABC ∽ △DEF。



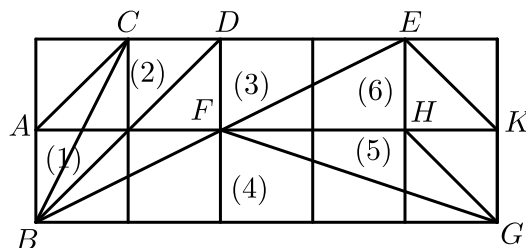
！通过上述证明可得相似三角形的判定定理：_____的两个三角形相似。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子5

7. 在正方形网格上有6个三角形：(1) △ABC，(2) △BCD，(3) △BDE，(4) △BFG，(5) △FGH，(6) △EKF，其中(2)到(6)中与(1)相似的三角形的个数是_____。

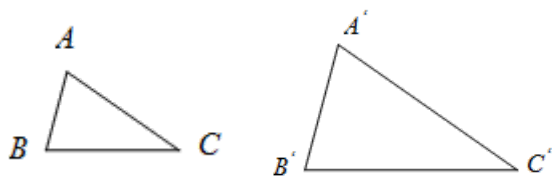


两边成比例且夹角相等

同理，类似于判定三角形全等的 SAS 方法，也可利用两边成比例和夹角相等来判定两个三角形相似。

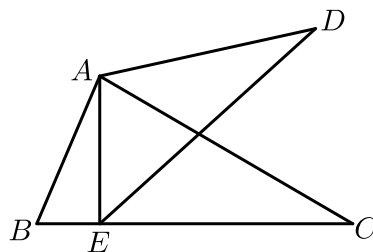
！相似三角形的判定定理：_____且_____的两个三角形相似。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle A = \angle A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



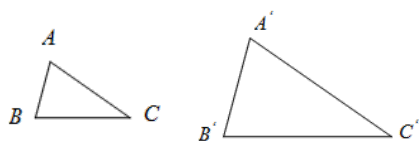
栗子6

8. 如图，已知： $\angle BAC = \angle EAD$ ， $AB = 20.4$ ， $AC = 48$ ， $AE = 17$ ， $AD = 40$ 。
求证： $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。



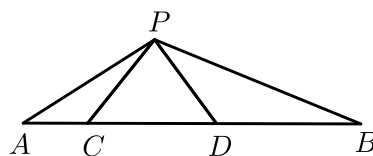
两角分别相等

- ！相似三角形的判定定理：两角分别相等的两个三角形相似。
 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



栗子7

9. 如图，点C、D在线段AB上，且 $\triangle PCD$ 是等边三角形， $\angle APB = 120^\circ$ 。



- (1) 求证： $\triangle ACP \sim \triangle PDB$ 。

！相似三角形判定总结：

相似三角形判定

1、_____于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。（即_____出相似）

2、_____对应成比例的两个三角形相似。

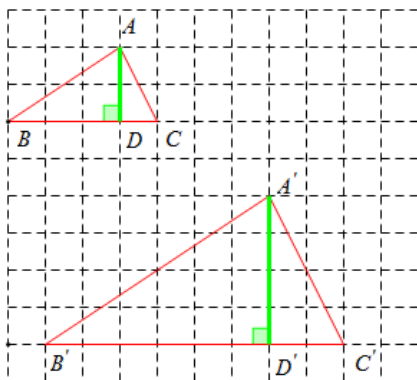
3、_____成比例且_____相等的两个三角形相似。

4、_____分别相等的两个三角形相似。

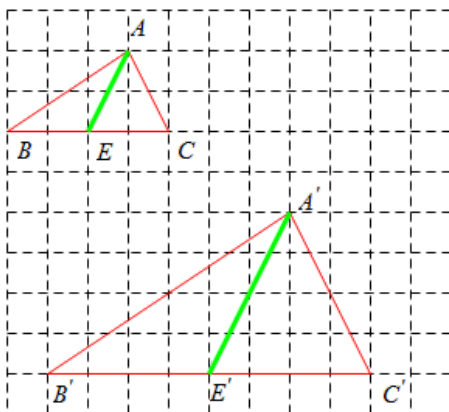
四、相似三角形的性质

思考：

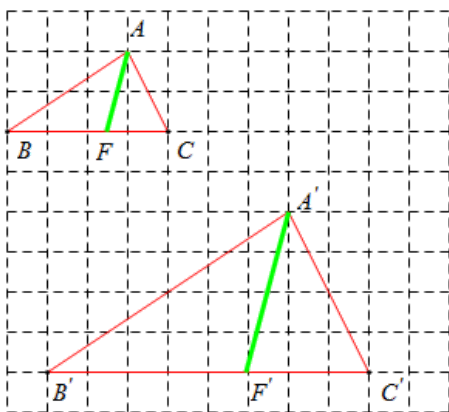
如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形高的比值 $\frac{AD}{A'D'} =$ _____。



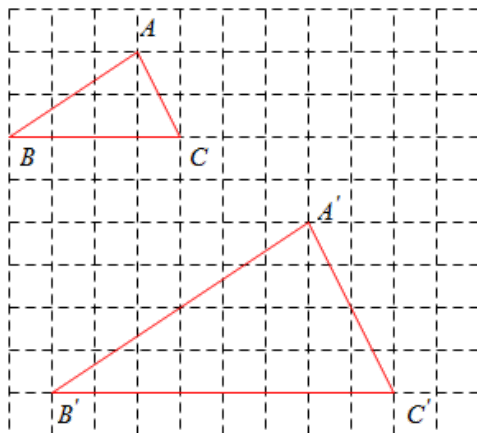
如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形中线的比值 $\frac{AE}{A'E'} =$ _____。



如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形角分线的比值 $\frac{AF}{A'F'} =$ _____。

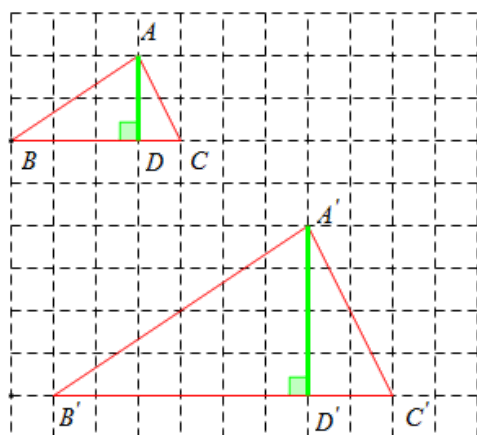


如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 相似比为 $\frac{1}{2}$, 则图中两个三角形的周长的比值是_____.



根据前面的探究, 我们也可以推出相似三角形的面积比与相似比的关系.

如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则有



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

! 相似三角形性质总结:

相似三角形的性质

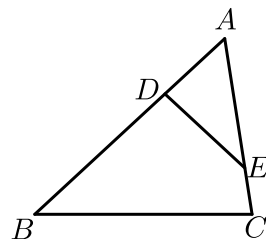
相似三角形的_____相等, _____之比相等, 都等于_____.

相似三角形对应_____的比、对应_____的比、对应_____的比、_____之比都等于相似比.

相似三角形面积的比等于相似比的_____.

栗子8

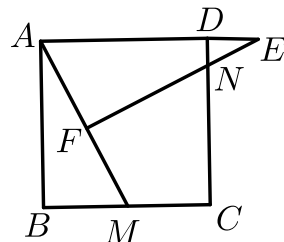
10. 如图, $\triangle ABC \sim \triangle AED$, $\angle ADE = 80^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 则 $\angle C$ 等于() .



- A. 40° B. 60° C. 80° D. 100°

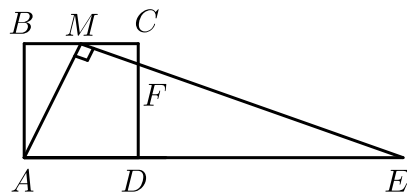
栗子9

11. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 为 BC 上一点, F 是 AM 的中点, $EF \perp AM$, 垂足为 F , 交 AD 的延长线于点 E , 交 DC 于点 N .



- (1) 求证: $\triangle ABM \sim \triangle EFA$.
(2) 若 $AB = 12$, $BM = 5$, 求 DE 的长 .

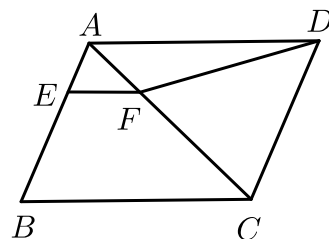
12. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 为 BC 上一点, $ME \perp AM$, ME 交 CD 于点 F , 交 AD 的延长线于点 E , 若 $AB = 4$, $BM = 2$, 则 $\triangle DEF$ 的面积为() .



- A. 9 B. 8 C. 15 D. 14.5

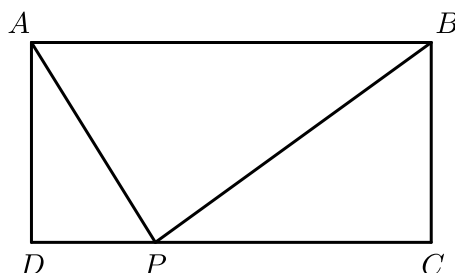
栗子10

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC 是一条对角线， $EF \parallel BC$ ，且 EF 与 AB 相交于点 E ，与 AC 相交于点 F ， $3AE = 2EB$ ，连接 DF 。若 $S_{\triangle AEF} = 1$ ，则 $S_{\triangle ADF}$ 的值为 _____。



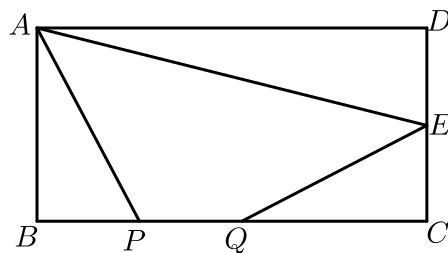
栗子11

14. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = 2$ ， $AB = 5$ ， P 为 CD 边上的动点，当 $\triangle ADP$ 与 $\triangle BCP$ 相似时， $DP =$ _____。



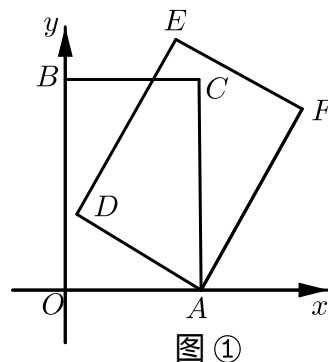
独步天下1

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， E 为 CD 的中点，若 P 、 Q 为 BC 边上的两个动点，且 $PQ = 2$ ，若想使得四边形 $APQE$ 的周长最小，则 BP 的长度应为 _____。

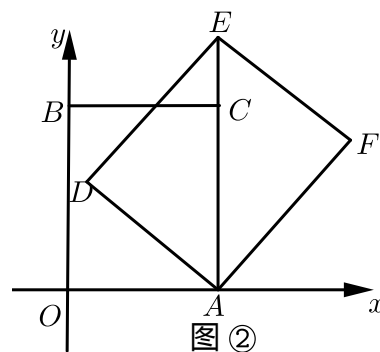


16. 在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(6,0)$ ，点 $B(0,8)$ 以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F ，记旋转角为 $\alpha(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 。

(1) 如图①，当 $\alpha = 30^\circ$ 时，求点 D 的坐标。

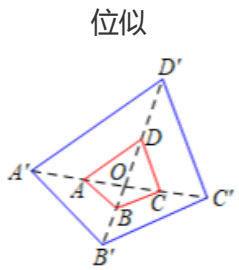


(2) 如图②，当点 E 落在 AC 的延长线上时，求点 D 的坐标。



(3) 当点 D 落在线段 OC 上时，求点 E 的坐标（直接写出结果即可）。

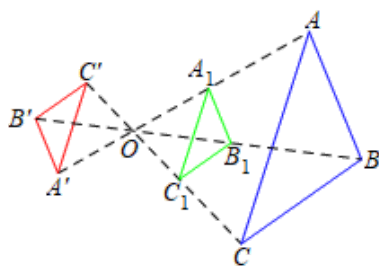
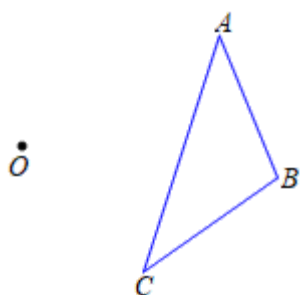
五、位似图形

	定义	两个多边形不仅_____, 而且对应顶点的连线_____, 像这样的两个图形叫做位似图形. 这点叫做_____. 这时我们说这两个图形关于这点位似.
	性质	1、对应点的连线都经过_____. 2、位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于_____. 3、不经过位似中线的对应线段_____或_____.
	位似变换	以原点为位似中心的位似变换(位似比为 k)其对应点的坐标关系可表示为: $P(x,y)$ 对应点为位似中心同侧_____; $P(x,y)$ 对应点为位似中心异侧_____.

位似作图:

利用位似变换可以把一个图形_____或_____, 若位似比大于1, 则通过位似变换把原图形放大; 若位似比小于1, 则通过位似变换把原图形缩小.

已知 $\triangle ABC$, 画出一个三角形, 与 $\triangle ABC$ 是位似图形, 且位似比为2:5, 点 O 为位似中心.



以一点为位似中心, 将一个图形按照一定的相似比放大或缩小, 有两种情况:

①当 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的同侧时, 构建的是“_____”字相似.

②当 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的异侧时, 构建的是“_____”字相似.



栗子12

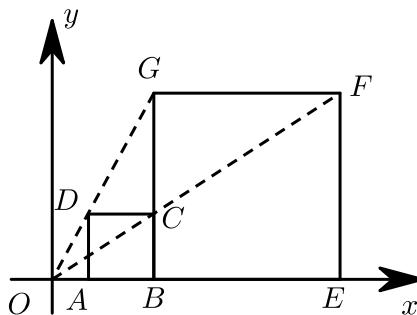
17. 关于对位似图形的表述，下列命题正确的有（ ）。

- ①相似图形一定是位似图形，位似图形一定是相似图形；
- ②位似图形一定有位似中心；
- ③如果两个图形是相似图形，且每组对应点的连线所在的直线都经过同一个点，那么这两个图形是位似图形；
- ④位似图形上任意一组对应点 P ， P' 与位似中心 O 的距离满足 $OP = k \cdot OP'$ 。

- A. ①②③④ B. ②③④ C. ②③ D. ②④

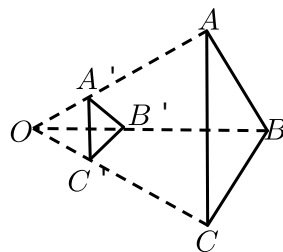
栗子13

18. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比为 $\frac{1}{3}$ ，点 A ， B ， E 在 x 轴上，若正方形 $BEFG$ 的边长为6，则 C 点坐标为（ ）。



- A. (3, 2) B. (3, 1) C. (2, 2) D. (4, 2)

19. 如图，以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小后得到 $\triangle A'B'C'$ ，已知 $OB = 3OB'$ ，则 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为（ ）。



- A. 1 : 3 B. 1 : 4 C. 1 : 5 D. 1 : 9

栗子14

20. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(5, 0)$ 、 $B(6, 4)$ 、 $C(3, 0)$ ，将 $\triangle ABC$ 以坐标原点 O 为位似中心，以位似比 $2 : 1$ 进行缩小，则缩小后的点 B 所对应的点的坐标为 _____。

21. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0)$ ， $A(6,0)$ ， $B(0,8)$ ，以某点为位似中心，作出 $\triangle AOB$ 的位似 $\triangle CDE$ ，则位似中心的坐标为 _____ ．

